ریاضي ، دیفرانسیل و انتگرال ، - ۱۳۹۶۰۸۱۹

۸۱- با توجه به رابطهٔ $\frac{۱}{۳} = \overline{a۳} / ۰ - \overline{b}۱ / ۱$، حاصل $a - b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۸۲- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{b} < \frac{۲}{|۳x - a|}$، به صورت همسایگی متقارن محذوف به مرکز ۲ و شعاع همسایگی $\frac{۱۰}{۹}$ می‌باشد. حاصل ab چند می‌باشد؟

۱) $\frac{۴۰}{۹}$
۲) ۱۰
۳) $\frac{۱۸}{۵}$
۴) $\frac{۵}{۱۸}$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- دنبالهٔ $\{n^۲ - ۲n - ۸\}$، چند جمله منفی دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۸۴- مجموع ۱۰۰ جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = [\frac{n}{۲}]\cos n\pi$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) ۱۰۰
۲) ۵۰
۳) صفر
۴) ۵۰-

شما پاسخ نداده اید

۸۵- کوچکترین کران بالای دنبالهٔ $a_n = -۳n^۲ + ۸n + ۱$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۸۶- اگر دنبالهٔ $a_n = n + \frac{K}{n}$ صعودی باشد، حداکثر مقدار K کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۸۷- کدام یک از جملات زیر دربارهٔ دنباله با جملات $a_n = |۲n-۱| + |n-۷| - ۳n$ درست است؟

۱) دارای کوچکترین کران بالا است ولی ماکزیمم ندارد. ۲) همگرا و غیر یکنوا است.

۳) دارای بزرگترین کران پایین است ولی می‌نیمم ندارد. ۴) کراندار و یکنواست.

شما پاسخ نداده اید

۸۸- در دنبالهٔ $\{a_n\}$ به ازای $n \geq ۱۵۰$ داریم: $\left|a_n - \frac{۱}{۲}\right| < ۰/۰۰۱$. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) دنباله به $L = \frac{۱}{۲}$ همگراست. ۲) اگر دنباله نزولی باشد، الزاماً همگراست.

۳) دنباله فقط از بالا کراندار است. ۴) اگر دنباله همگرا باشد، به $L = \frac{۱}{۲}$ همگراست.

شما پاسخ نداده اید

۸۹- اگر $a_۱ = \sqrt{۱۲}$ و $a_{n+۱} = \sqrt{۱۲ + a_n}$ باشد، در این صورت دنبالهٔ کراندار $\{a_n\}$:

۱) همگرا به ۴ است. ۲) همگرا به ۲ است.

۳) همگرا به $\sqrt{۱۲}$ است. ۴) واگرا است.

شما پاسخ نداده اید

۹۰- اگر دنبالهٔ $c_n = \begin{cases} \frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}(-n) & ;n = ۲k \\ \frac{(a-۱)n^۲ + bn + ۳}{۲n+۵} & ;n = ۲k-۱ \end{cases}$ همگرا باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲-

۳) ۱- ۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- اگر قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به صفحهٔ xy را B و قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور xها را C بنامیم و $|BC| = ۱۰$ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ xz کدام است؟

۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- بردار $v = (-۱,-۲,۲)$ مفروض است. مجموع مؤلفه‌های مختصات بردار u به طول ۱۵ که موازی و هم جهت با v باشد، کدام است؟

۱) -۱
۲) -۳
۳) -۵
۴) -۶

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر برداری به طول ۴ که با محور xها، زاویهٔ ۶۰°، با محور yها، زاویهٔ ۱۳۵° و با محور zها، زاویهٔ حاده می‌سازد، به صورت $a = mi + nj + pk$ باشد، p کدام است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) $-۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- اگر $a = (۲,۱,-۲)$ و $a + b + c = (۱,۱,۱)$ باشد، حاصل $a.b + a.c$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) -۹
۴) -۸

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر $|a - b| = |a + b|$ و زاویهٔ بین دو بردار $a + b$ و $a - b$ برابر ۶۰° باشد، $\frac{|a|}{|b|}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) ۳
۴) $\sqrt{۳}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اگر $\frac{x}{۱} + \frac{y}{۲} + \frac{z}{۳} = ۱$، آن‌گاه کمترین مقدار عبارت $\frac{x^۲}{۱} + \frac{y^۲}{۴} + \frac{z^۲}{۹}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۱۴}$
۳) ۱
۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- بردارهای $\mathbf{a}=(۲,۳,۱)$ و $\mathbf{b}=(۱,۱,-۱)$ مفروض‌اند. کدام یک از بردارهای زیر، بر دو بردار $۳\mathbf{a}-۲\mathbf{b}$ و $-۲\mathbf{a}+۵\mathbf{b}$ عمود است؟

۱) $(۴,-۳,۱)$ ۲) $(۱,۱,۱)$

۳) $(۴,۳,-۱)$ ۴) $(۱,-۱,۱)$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- اگر $|\mathbf{a}|=۲|\mathbf{b}|=۶$ و دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با هم زاویهٔ ۱۵۰° بسازند، طول بردار $\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) $۵۴\sqrt{۳}$

۳) ۵۴ ۴) $۱۰۸\sqrt{۳}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- در مثلث ABC، $A(۰,۰,۰)$، $B(۳,۰,۰)$، $C(۱,۱,۱)$ و AH ارتفاع وارد بر ضلع BC است. اندازهٔ AH چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- به ازای بردارهای غیرصفر و غیرهم صفحهٔ $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، بردار $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ همواره با کدام دو بردار، هم صفحه است؟

۱) $\mathbf{a},\mathbf{b}$ ۲) $\mathbf{a},\mathbf{c}$

۳) $\mathbf{b},\mathbf{c}$ ۴) با هیچ دو برداری از سه بردار مزبور هم صفحه نیست.

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضیات گسسته ، - ۱۳۹۶۰۸۱۹

۱۲۱- با ارقام ۰,۱,۲,۳ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به صورتی که ارقام زوج کنار هم باشند؟

۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- هشت ضلعی محدبی در یک صفحه مفروض است. چند مثلث در این صفحه قابل رسم است در صورتی که رأس‌های هر مثلث از میان رأس‌های هشت ضلعی مفروض انتخاب شوند و در هر مثلث، فقط یکی از اضلاع بر یک ضلع هشت ضلعی منطبق باشد؟

۱) ۱۶
۲) ۳۲
۳) ۴۸
۴) ۶۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- از هر یک از ۶ شهر مختلف، ۴ نفر به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ نفر از بین آن‌ها انتخاب کرد طوری که حداکثر دو نفر همشهری باشند؟

۱) ۱۲۸۰
۲) ۱۸۰۰
۳) ۲۰۰۰
۴) ۲۱۶۰

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- دنبالهٔ درجه‌های رئوس یک گراف به صورت $۴,۴,a,۲,b$ می‌باشد. حاصل $a+b$ چقدر است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- گراف متناظر با بازه‌های (x,y)، $(۶,۱۱)$، $(۵,۱۰)$، $(۳,۷)$، $(۲,۵)$ و $(۱,۶)$ دارای ۶ دور است. بازهٔ (x,y) کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $(۲,۳)$
۲) $(۱۱,۱۲)$
۳) $(۰,۲)$
۴) $(۱۰,۱۲)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- در گراف سادهٔ G، رابطهٔ $۹p \geq ۲q$ برقرار است. حداقل مقدار q در این گراف کدام است؟

۱) ۲۱
۲) ۲۸
۳) ۳۶
۴) ۴۵

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- در گرافی که دارای ۹ رأس و ۳۳ یال است، کمترین مقدار $\Delta + \delta$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۱۲ ۴) ۱۳

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- در گراف کامل K_6، چند مسیر به طول ۳ شامل رأس a وجود دارد؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰

۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- اگر دنبالهٔ درجه‌های رئوس گراف G به صورت ۴,۴,۳,۳,۲ باشد، آن گاه گراف چند دور به طول ۳ دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- چند گراف همبند و غیرمنتظم با شرط $pq = 20$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضي پایه ، - ۱۳۹۶۰۸۱۹

۱۰۱- در معادلهٔ $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x)}{2\sin(\frac{\pi}{2} + x) - \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = 2$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) -1

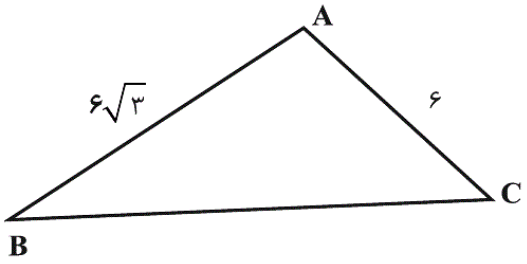
شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر $\sin^۲\alpha - \sin\alpha > ۰$ و $\cos\alpha - \cos^۲\alpha < ۰$، انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در کدام ربع از دایره مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- در شکل زیر اگر $\hat{B} = ۳۰^\circ$ باشد، اندازه زاویهٔ $\hat{A}$ کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟



۱) ۱۲۰° یا ۶۰°
۲) ۹۰° یا ۳۰°
۳) ۴۵° یا ۱۳۵°
۴) ۶۰° یا ۱۳۵°

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\cos ۲x}{-\sin x + \cos x}$ کدام است؟

۱) ۲π
۲) π
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۴}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- حاصل عبارت $A = \sin^۲(\frac{\pi}{۶} - x) + \sin^۲(\frac{\pi}{۶} + x) + \frac{۱}{۲}\cos ۲x$ به ازای $x = \frac{\pi}{۱۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر $\sin x = \frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\cos ۴x$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۲۷}$
۲) $\frac{۱۷}{۸۱}$
۳) $\frac{۱۳}{۶۴}$
۴) $\frac{۱۷}{۶۴}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر $\tan(۲\alpha + \frac{\beta}{۳}) = \sqrt{۳} + ۱$ و $\tan(۲\alpha - \frac{\beta}{۳}) = \sqrt{۳} - ۱$ باشد، $\tan\frac{۲\beta}{۳}$ برابر است با:

۱) $\frac{-۳}{۲}$
۲) $\frac{-۲}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر $\sin\frac{\alpha}{۲}=۱-\cos\alpha$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای $\tan۲\alpha$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $-۲\sqrt{۳}$
۴) -۳

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- اگر $x-y=\frac{\pi}{۳}$ باشد، حاصل $\frac{۲\sin(x+y)-\sqrt{۳}}{\cos x.\cos y}$ کدام است؟

۱) $\tan x$
۲) $\tan y$
۳) $۴\tan y$
۴) $۴\tan x$

شما پاسخ نداده اید

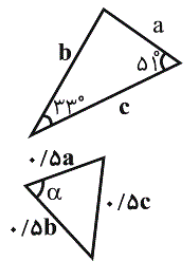
۱۱۰- حاصل $\sqrt{۲}\cos۵۵^\circ+\cos۱۰^\circ-\sin۱۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}\sin۵۵^\circ$
۲) $۲\sqrt{۲}\sin۵۵^\circ$
۳) $\sqrt{۲}\cos۵۵^\circ$
۴) $۲\sqrt{۲}\cos۵۵^\circ$

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، هندسه ۱ ، - ۱۳۹۶۰۸۱۹

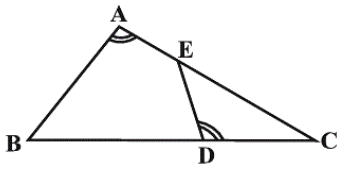
۱۳۱- با توجه به شکل، زاویهٔ α چند درجه است؟



۱) ۹۶
۲) ۹۷
۳) ۹۸
۴) ۹۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- در شکل زیر $\hat{A}=\hat{EDC}$ است. حاصل $BC.CD$ کدام است؟



۱) $AC.DE$
۲) $AB.CE$
۳) $AC.CE$
۴) $AB.DE$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- در مثلث ABC، خط Δ که با BC موازی است، AB و AC را به ترتیب در نقاط R و S قطع کرده است. نسبت مساحت مثلث ARS به مساحت مثلث BRS برابر کدام است؟

۱) $\frac{RS}{BC-RS}$

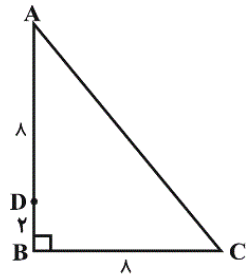
۲) $\frac{AR}{AB}$

۳) $\frac{SC}{AS}$

۴) $\frac{BC-RS}{BC}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- در شکل زیر، فاصلهٔ نقطهٔ D از وسط وتر کدام است؟



۱) ۴

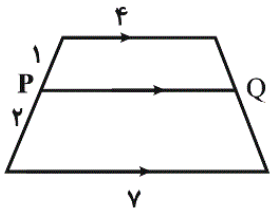
۲) ۵

۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) $۳\sqrt{۵}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- در شکل زیر پاره خط PQ با قاعده‌های ذوزنقه موازی است. طول PQ کدام است؟



۱) ۴/۵

۲) ۴/۷۵

۳) ۵

۴) ۵/۲۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- مثلثی به طول اضلاع $۵,۴,۲$ با مثلث دیگری به طول اضلاع $b,a,۴$ متشابه است. بیشترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۱

۲) ۲۰

۳) ۱۸

۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- نقطه E واقع بر ضلع CD از مستطیل $ABCD$ در فاصلهٔ ۱۲ سانتی‌متری از B واقع است. اگر $DE = ۲EC$ باشد، نقطهٔ تلاقی AC و BE در چه فاصله‌ای از B واقع است؟

۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۱۲ و ۱۶ و ارتفاع ۱۴ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و قاعدهٔ کوچک، چند واحد مربع است؟

۱) ۳۶

۲) ۲۸

۳) ۲۴

۴) ۴۲

شما پاسخ نداده اید

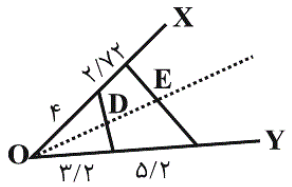
۱۳۹- AM ، BN و CP میانه‌های مثلث ABC هستند. نقطهٔ برخورد CP و MN را O می‌نامیم. مساحت مثلث OMC، چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- در شکل زیر نیمساز زاویهٔ XOY رسم شده است. طول DE چند برابر طول OD است؟



۱) ۱

۲) ۱/۱

۳) ۱/۲

۴) ۱/۳

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، - ۱۳۹۶۰۸۱۹

۹۱- اگر a و $b = \frac{a}{۱+\sqrt{۳}} + \frac{۳}{۲+\sqrt{۳}}$ اعداد گویا باشند، مقدار $a-۲b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۹۲- از نامساوی‌های $a < b$ و $۰ < c < d$ ، کدام گزینهٔ زیر نتیجه نمی‌شود؟

۱) $a-d < b-c$ ۲) $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ ۳) $c+۲b < d+a$ ۴) $c-۲b < d-a$

شما پاسخ نداده اید

۹۳- اگر $a^۳$ عددی گویا و $b^۵$ عددی گنگ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $a^۲+b^{۱۰}$ گویاست ۲) $a^۳b^۵$ گنگ است ۳) $a^۳+b^۵$ گویاست ۴) $\frac{a^۶+۱}{b}$ گنگ است

شما پاسخ نداده اید

۹۴- جملات دنبالهٔ $\left\{\frac{۲n-۱}{۳n+۲}\right\}$ برای مقادیر $n \geq n_۰$ در بازهٔ $\left(۰/۶۶, \frac{۲}{۳}\right)$ قرار می‌گیرند. کوچک‌ترین مقدار $n_۰$ کدام است؟

۱) ۱۱۶ ۲) ۱۱۷ ۳) ۱۱۸ ۴) ۱۱۹

شما پاسخ نداده اید

۹۵- کدام دنباله همگرا است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) $\{n^{(-۱)^{۲n-۱}}\}$ ۲) $\left\{\cos\frac{n\pi}{۲}\right\}$ ۳) $\left\{\left[۲+\frac{(-۱)^n}{n}\right]\right\}$ ۴) $\left\{\left[۱-\frac{(-۱)^n}{n}\right]\right\}$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- اگر $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} & ; \ n \text{ زوج} \\ 1 - \frac{1}{n} & ; \ n \text{ فرد} \end{cases}$ باشد، آنگاه $\lim_{n \to \infty} (a_{n+1} - a_{n+3})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۹۷- حد دنبالهٔ $\frac{(n + \sqrt{n} + 1)^2 - (n + 2\sqrt{n} + 1)^2}{(2\sqrt{n} + 1)^2 (\sqrt{n} + 3)}$ وقتی $n \to +\infty$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۹۸- کدام یک از دنباله‌های زیر صعودی و همگرا است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) $U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ۲) $U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ ۳) $U_n = \left[\frac{(-1)^n}{n}\right]$ ۴) $U_n = \frac{2n + 1}{n}$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- بزرگترین کران پایین دنباله با جملهٔ عمومی $U_n = \frac{3^n}{n^3}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{7 + 4^{n-1}}{2 + 4^n}$، چگونه است؟

۱) بی‌کران - صعودی ۲) بی‌کران - نزولی ۳) کراندار - صعودی ۴) کراندار - نزولی

شما پاسخ نداده اید

-۸۱ (حمید علیزاده)

$$۱/۱\overline{b}-۰/a\overline{۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{\overline{۱۱b}-۱۱}{۹۰}-\frac{\overline{a۳}-a}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{(۱۱۰+b-۱۱)-(۱۰a+۳-a)}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۹۶+b-۹a=۳۰\Rightarrow b=۹a-۶۶$$

$a\Rightarrow a=۸\Rightarrow b=۶\Rightarrow a-b=۲$ و b اعداد صحیح از ۰ تا ۹ هستند.

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ تا ۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۲ (میلاد سجادی‌لاریجانی)

همسایگی متقارن محذوف نقطهٔ a با شعاع r را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$\frac{۱}{|x-a|}>\frac{۱}{r}$$

$$\frac{۲}{|۳x-a|}>\frac{۱}{b}\Rightarrow\frac{۲}{۳\left|x-\frac{a}{۳}\right|}>\frac{۱}{b}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\frac{۳}{۲}\left|x-\frac{a}{۳}\right|}>\frac{۱}{b}\xrightarrow{\times\frac{۳}{۲}}\frac{۱}{\left|x-\frac{a}{۳}\right|}>\frac{۳}{۲b}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\left|x-\frac{a}{۳}\right|}>\frac{۱}{\frac{۲}{۳}b}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{۳}=۲\Rightarrow a=۶\\ \frac{۲}{۳}b=\frac{۱۰}{۹}\Rightarrow b=\frac{۵}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow ab=۱۰$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۳ (کیا مقدس‌نیاک)

$$n^۲ - ۲n - ۸ < ۰ \Rightarrow (n-۴)(n+۲) < ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲ < n < ۴ \\ n \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ \leq n < ۴$$

پس به ازای $n = ۱,۲,۳$ ، جملات این دنباله منفی می‌شوند.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$S_{۲n} = n \ , \ S_{۲n-۱} = ۰ \ , \ n \in \mathbb{N}$$

بنابراین:

$$S_{۱۰۰} = S_{۲\times ۵۰} = ۵۰$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

-۸۵ (کیا مقدس‌نیاک)

در دنبالهٔ $a_n = An^۲ + Bn + C$ ، اگر $A > ۰$ باشد، شمارهٔ جمله‌ای که کران پایین دنباله است، نزدیکترین عدد طبیعی به $\frac{-B}{۲A}$ بوده و اگر $A < ۰$ باشد، نزدیکترین عدد طبیعی به $\frac{-B}{۲A}$ ، شمارهٔ جملهٔ کران بالای دنباله است.

دنباله کران بالا دارد. : $A = -۳ < ۰$

$$\frac{-B}{۲A} = -\frac{۸}{۲(-۳)} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳} \simeq ۱/۳$$

$$\Rightarrow a_۱ = -۳(۱)^۲ + ۸(۱) + ۱ = ۶$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۸۶ (کاظم اجلالی)

چون دنباله صعودی است، پس به ازای هر n طبیعی باید داشته باشیم: $a_{n+1} \geq a_n$

$$\Rightarrow n+1+\frac{K}{n+1} \geq n+\frac{K}{n}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{n+1-n}{n^2+n}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow K \leq n^2+n$$

با توجه به این که دنبالهٔ $\{n^2+n\}$ صعودی است، پس کافی است که K از جملهٔ اول این دنباله که ۲ است کوچکتر یا مساوی با آن باشد. در این صورت K از هر n^2+n ای، که n طبیعی است، کوچکتر یا مساوی با آن خواهد بود. پس $K \leq 2$.

بنابراین حداکثر مقدار K برابر ۲ است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۷ (سیدمحمودرضا اسلامی)

ضابطهٔ دنباله را ساده می‌کنیم:

$$a_n=(2n-1)+|n-7|-3n=|n-7|-n-1$$

$$a_n=\begin{cases}-2n+6 & ; n \leq 7\\ -8 & ; n \geq 7\end{cases}$$

اگر کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین دنباله را به‌ترتیب با $Sup(a_n)$ و $Inf(a_n)$ نشان دهیم، با توجه به ضابطهٔ این دنباله، داریم:

$$Sup(a_n)=Max(a_n)=a_1=4$$

$$Inf(a_n)=Min(a_n)=-8$$

این دنباله، کراندار، نزولی و همگرا به -8 است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۸- (سیدمحمودرضا اسلامی)

از $\left|a_n - \frac{۱}{۲}\right|$ نتیجه می‌گیریم که جملات دنباله از جملهٔ ۱۵۰ به بعد در فاصلهٔ $(\frac{۱}{۲}-۰/۰۰۱, \frac{۱}{۲}+۰/۰۰۱)$ قرار دارند و دنباله الزاماً کران دار است. پس اگر دنباله نزولی باشد، این دنباله طبق قضیه، حتماً همگراست.

مشخص است که با فرض داده شده، لزومی ندارد که دنباله همگرا باشد، حتی اگر همگرا هم باشد، می‌تواند به عددی در فاصله $[\frac{۱}{۲}-۰/۰۰۱, \frac{۱}{۲}+۰/۰۰۱]$ همگرا باشد.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ✓۲ ۳ ۴

۸۹- (جهانبخش نیکنام)

دنبالهٔ a_n صعودی و از بالا کراندار است، پس همگراست. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ پس $\lim_{n\to\infty} a_{n+۱} = L$ پس:

$$L = \sqrt{۱۲+L} \Rightarrow L^۲ - L - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (L-۴)(L+۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = ۴ \\ L = -۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

✓۱ ۲ ۳ ۴

۹۰- (حبیب شفیعی)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}(-n) = \frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}(-\infty) = \frac{۱}{\pi}(\frac{-\pi}{۲}) = \frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(a-۱)n^۲ + bn + ۳}{۲n+۵} = \frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱ \\ \frac{b}{۲} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow b = -۱ \end{cases} \Rightarrow a+b = ۰$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

✓۱ ۲ ۳ ۴

-۱۱۱ (کیوان دارابی)

$$A(x,y,z) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به صفحهٔ } xy} B(x,y,-z)$$
$$A(x,y,z) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} C(x,-y,-z)$$

$$|BC| = ۱۰ \Rightarrow \sqrt{(۲y)^۲} = ۱۰ \Rightarrow |۲y| = ۱۰ \Rightarrow |y| = ۵$$

$$\Rightarrow \text{فاصله } A \text{ از صفحهٔ } xz = ۵$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۴ تا ۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۱۲ (سید امیر ستوده)

بردارها هم امتداد و هم جهت هستند، پس هر کدام مضربی مثبت از دیگری هستند.

$$u = rv = (-r,-۲r,۲r) \text{ و } r > ۰$$

$$|u| = |rv| = r|v|$$

$$\Rightarrow ۱۵ = r \times ۳ \Rightarrow r = ۵$$

$$\Rightarrow u = (-۵,-۱۰,۱۰) \Rightarrow \text{مجموع مؤلفه‌ها} = -۵ - ۱۰ + ۱۰ = -۵$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۸ و ۹)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

-۱۱۳ (محسن فاطمی)

$$\cos^{۲}۶۰^{\circ}+\cos^{۲}۱۳۵^{\circ}+\cos^{۲}\theta=۱$$

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۴}+\cos^{۲}\theta=۱\Rightarrow\cos^{۲}\theta=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\theta\ \text{حاده}}\cos\theta=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e_a}=(\frac{۱}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲})\ \text{و}\ \mathbf{a}=۴\mathbf{e_a}\Rightarrow\mathbf{a}=(۲,-۲\sqrt{۲},۲)\Rightarrow\mathbf{p}=۲$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۱، ۱۲، ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۴ (نادر حاجی زاده)

$$\mathbf{a.b}+\mathbf{a.c}=\mathbf{a.(b}+\mathbf{c)}$$

از طرفی:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=(۱,۱,۱)\Rightarrow\mathbf{b}+\mathbf{c}=(۱,۱,۱)-\mathbf{a}=(۱,۱,۱)-(۲,۱,-۲)$$

$$\Rightarrow\mathbf{b}+\mathbf{c}=(-۱,۰,۳)$$

$$\Rightarrow\mathbf{a.(b}+\mathbf{c)}=(۲,۱,-۲).(-۱,۰,۳)=-۲-۶=-۸$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۱۵ (مجید محمدی نویسی)

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{(a+b).(a-b)}{|a+b||a-b|} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{|a|^۲ - |b|^۲}{|a+b|^۲} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$|a+b|^۲ = ۲(|a|^۲ - |b|^۲) \rightarrow |a|^۲ + |b|^۲ + \underbrace{۲a.b}_{۰} = ۲|a|^۲ - ۲|b|^۲$$

$$\Rightarrow |a|^۲ = ۳|b|^۲ \Rightarrow \frac{|a|^۲}{|b|^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \sqrt{۳}$$

تذکر: می‌دانیم هر گاه $|a+b| = |a-b|$ باشد، یعنی متوازی الاضلاعی داریم به اضلاع a و b که قطرهایش با هم برابرند که این حالت فقط در مستطیل و مربع اتفاق می‌افتد یعنی $a \perp b$ و بنابراین $a.b = ۰$.

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۱۶ (سامان اسپهرم)

$$a = (\frac{x}{۱}, \frac{y}{۲}, \frac{z}{۳}) \quad , \quad b = (۱,۱,۱)$$

نامساوی کشی ـ شوارتس: $(a.b)^۲ \le |a|^۲ |b|^۲$

$$(\frac{x}{۱} + \frac{y}{۲} + \frac{z}{۳})^۲ \le (\frac{x^۲}{۱} + \frac{y^۲}{۴} + \frac{z^۲}{۹})(۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲)$$

$$\Rightarrow (۱)^۲ \le (\frac{x^۲}{۱} + \frac{y^۲}{۴} + \frac{z^۲}{۹})(۳) \Rightarrow \frac{x^۲}{۱} + \frac{y^۲}{۴} + \frac{z^۲}{۹} \ge \frac{۱}{۳}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحهٔ ۲۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

$$\begin{matrix}\mathbf{n}\perp(\mathbf{3a}-\mathbf{2b})\\ \mathbf{n}\perp(-\mathbf{2a}+\mathbf{5b})\end{matrix}\Rightarrow \mathbf{n}\parallel(\mathbf{3a}-\mathbf{2b})\times(-\mathbf{2a}+\mathbf{5b})\Rightarrow$$

$$\mathbf{n}\parallel \mathbf{1}\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\Rightarrow \mathbf{n}\parallel\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

پس $\mathbf{n}$ می‌تواند هر برداری موازی با $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ باشد.

$$\begin{matrix}\mathbf{a}=(\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{1})\\ \mathbf{b}=(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1})\end{matrix}\Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b}=(-\mathbf{4},\mathbf{3},-\mathbf{1})$$

بردار گزینهٔ ۱، قرینهٔ این بردار است یعنی با $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ موازی است.

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$|\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|=|\mathbf{a}||\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\times ۱$$

چون $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ بر $\mathbf{a}$ عمود می‌شود، زاویهٔ بین این دو بردار قائمه است، پس سینوس آن

برابر ۱ است.

در نتیجه:

$$|\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|=|\mathbf{a}|\underbrace{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta}_{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$$

از طرفی، $|\mathbf{a}|=۶$ و $|\mathbf{b}|=۳$، پس:

$$|\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|=۶\times۶\times۳\times\sin۱۵۰^\circ=۶\times۶\times۳\times\sin۳۰^\circ=۵۴$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۱۹

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{BC}|$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AH}| = \frac{۲S_{\underset{ABC}{\Delta}}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{۲\times\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-۳,۰,۰)\\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (-۲,۱,۱)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = (۰,۳,-۳)$$

$$|\overrightarrow{AH}| = \frac{|(۰,۳,-۳)|}{|(-۲,۱,۱)|} = \sqrt{۳}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۲۵ تا ۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۲۰ (کیوان دارابی)

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\underbrace{(\mathbf{a}.\mathbf{c})}_{\text{عدد}}\mathbf{b}-\underbrace{(\mathbf{a}.\mathbf{b})}_{\text{عدد}}\mathbf{c}=m\mathbf{b}+n\mathbf{c}$$

پس $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ترکیب خطی $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ است و با این ۲ بردار، هم صفحه است.

تذکر: ترکیب‌های خطی هر دو بردار، در صفحهٔ آن دو بردار قرار دارند، بـه عبـارتی $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$ هم صفحه‌اند.

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

ریاضي ، ریاضیات گسسته ، - ۱۳۹۶۰۸۱۹

-۱۲۱ (سید وحید ذوالفقاری)

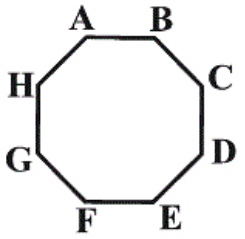
دو رقم ۲ و ۰ را یک رقم فرض کرده و به همراه ارقام ۱ و ۳ در یک ردیـف کنـار هم قرار می‌دهیم، پس $3!$ عدد داریم. باید جایگشت ارقام ۲ و ۰ را هم لحاظ کنـیم، پس تعداد اعداد $3!\times 2!=12$ خواهد بود. از این اعداد باید آنهایی را که رقـم صـفر در سمت چپ قرار گرفته است را کم کنیم، یعنی اعداد ۰۲۱۳ و ۰۲۳۱ مطلـوب مـا نیستند، پس $12-2=10$ عدد با شرایط داده شده داریم.

(ریاضی ۲ - ترکیبیات: صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۸۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۲- *(امیرحسین ابومحبوب)*

هشت ضلعی $ABCDEFGH$ را در نظر بگیرید.



فرض کنیم یکی از اضلاع مثلث بر ضلع AB منطبق باشد، در این صورت رأس سوم مثلث یکی از رئوس D، E، F و G می‌باشد. (در صورت انتخاب یکی از دو رأس مجاور با A و B، یعنی C یا H، دو ضلع مثلث بر اضلاع هشت ضلعی منطبق می‌گردد.)

یعنی به ازای انتخاب هر ضلع از هشت ضلعی مفروض، ۴ مثلث با شرایط خواسته شده قابل رسم است. در نتیجه تعداد کل مثلث‌ها برابر است با: $۸ \times ۴ = ۳۲$

(ریاضی ۲ - ترکیبیات: صفحه‌های ۱۷۶ تا ۱۸۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

حالت دوم: به $\binom{۶}{۱} = ۶$ طریق یک شهر را انتخاب و به $\binom{۴}{۲} = ۶$ طریق دو نفر از بین آنها انتخاب می‌کنیم. سپس از میان پنج شهر باقی‌مانده، یک شهر را انتخاب کرده و از ۴ دانش‌آموز این شهر، یکی را بر می‌گزینیم، یعنی:

$$\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱} = ۷۲۰$$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

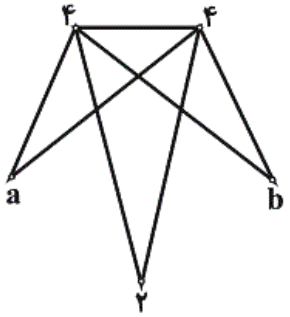
$$۱۲۸۰ + ۷۲۰ = ۲۰۰۰$$

(ریاضی ۲ - ترکیبیات: صفحه‌های ۱۸۶ تا ۱۹۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۴- *(حمید کروسی)*

مطابق نمودار رسم شده، گراف دو رأس درجهٔ ۴ و یک رأس درجهٔ ۲ دارد. در این صورت اگر دو رأس دیگر به هم متصل باشند، هر دو درجهٔ ۳ خواهند بود. ولی این خلاف ویژگی دنباله است $(b \leq ۲)$، پس لزوماً درجهٔ هر دو رأس باقیمانده برابر ۲ است، یعنی $a = b = ۲$ و در نتیجه $a + b = ۴$.



(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

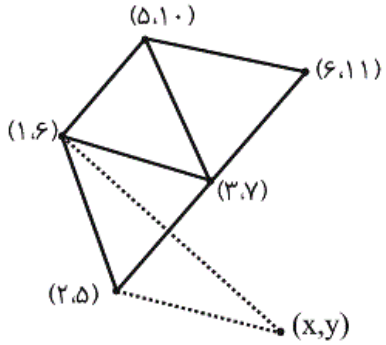
۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۵- *(علی اکبر علیزاده)*

با رسم گراف بدون در نظر گرفتن رأس متناظر با بازهٔ (x,y) ملاحظه می‌شود که گراف دارای ۶ دور است. بنابراین (x,y) باید به گونه‌ای باشد که دور جدیدی ایجاد نکند.

با بررسی گزینه‌ها ملاحظه می‌شود چنانچه (x,y) را به صورت $(۲,۳)$ در نظر بگیریم، یالهایی که به صورت خط چین رسم شده‌اند به گراف اضافه می‌شود که دورهای جدیدی به گراف اضافه می‌کند، بنابراین (x,y) نمی‌تواند $(۲,۳)$ باشد.

توجه کنید که اگر (x,y) مطابق سایر گزینه‌ها انتخاب شود، هیچ دور جدیدی به وجود نخواهد آمد.



(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۸ و ۱۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۶- (امیرحسین ابومحبوب)

در هر گراف، رابطهٔ $q \le \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$، بین مرتبه و اندازه برقرار است.

بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲q \le p(p-۱) \\ ۲q \ge ۹p \end{array}\right\} \Rightarrow p(p-۱) \ge ۹p \Rightarrow p-۱ \ge ۹ \Rightarrow p \ge ۱۰$$

$$۲q \ge ۹p \xrightarrow{p \ge ۱۰} ۲q \ge ۹۰ \Rightarrow q \ge ۴۵$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۷- (مجید محمدی نویسی)

با توجه به آن که گراف $K_۹$ دارای $\frac{۹ \times ۸}{۲} = ۳۶$ یال است، پس گراف مورد نظر ۳ یال کمتر از $K_۹$ دارد.

چون در $K_۹$ درجهٔ همهٔ رئوس $\Delta = \delta = ۸$ می‌باشد، با برداشتن ۳ یال مقدار Δ تغییر نمی‌کند، اما اگر ۳ یال را از یک رأس برداریم، $\delta = ۵$ می‌شود که کمترین مقدار ممکن است. بنابراین:

$$(\Delta + \delta)_{min} = ۸ + ۵ = ۱۳$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

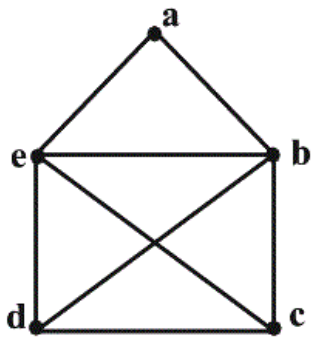
فرض کنید که رأس‌های انتخاب شده a، b، c و d باشند که ترتیب قرار گـرفتن آن‌ها در یک مسیر $\frac{۴!}{۲}=۱۲$ می‌شود. علت تقسیم بر ۲ آن است که در مسیر، جهت رفت و برگشت اهمیتی ندارد، مثلاً دو مسیر $abcd$ و $dcba$ یکی هسـتند. بنـابراین، تعداد مسیرهای مطلوب برابر است با: $۱۰\times۱۲=۱۲۰$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۹- *(علیرضا سیف)*

نمودار گراف به صورت زیر است:



این گراف شامل ۵ دور به طول ۳ است که عبارتند از:

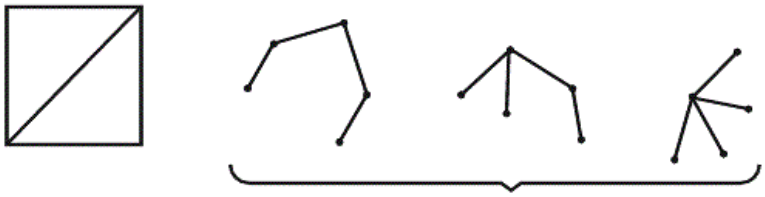
$$abea, bcdb, bceb, bdeb, cdec$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۰- (سروش موئینی)

در حالت‌های $p=۴$ و $q=۵$ و نیز $p=۵$ و $q=۴$ گراف هم بند و غیرمنتظم داریم:



$p=۴$
$q=۵$

$p=۵$
$q=۴$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۵ تا ۱۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

ریاضي ، رياضي پايه ، - ۱۳۹۶۰۸۱۹

۱۰۱- (مجید محمدی)

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)+\cos(\frac{\pi}{۲}+x)}{۲\sin(\frac{\pi}{۲}+x)-\cos(\frac{\pi}{۲}-x)}=\frac{\cos x-\sin x}{۲\cos x-\sin x}=۲$$

$$\xrightarrow{\cos x\neq ۰}\frac{\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۲\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}=۲\Rightarrow\frac{۱-\tan x}{۲-\tan x}=۲$$

$$\xrightarrow[\tan x\neq ۲]{}\tan x=۳$$

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۲- (سعید مدیرخراسانی)

$$\sin^2\alpha-\sin\alpha>0\Rightarrow \sin\alpha(\underbrace{\sin\alpha-1}_{<0})>0\Rightarrow \sin\alpha<0$$

$$\cos\alpha-\cos^2\alpha<0\Rightarrow \cos\alpha(\underbrace{1-\cos\alpha}_{>0})<0\Rightarrow \cos\alpha<0$$

$\Rightarrow$ انتهای کمان نظیر α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار دارد.

(ریاضی ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۳- (سعید مدیرخراسانی)

$$\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\frac{۶}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{۶\sqrt{۳}}{\sin\hat{C}}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\sin\hat{C}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}=۶۰^\circ\\ \text{یا}\\ \hat{C}=۱۲۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}=۹۰^\circ\\ \text{یا}\\ \hat{A}=۳۰^\circ\end{cases}$$

(ریاضی ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

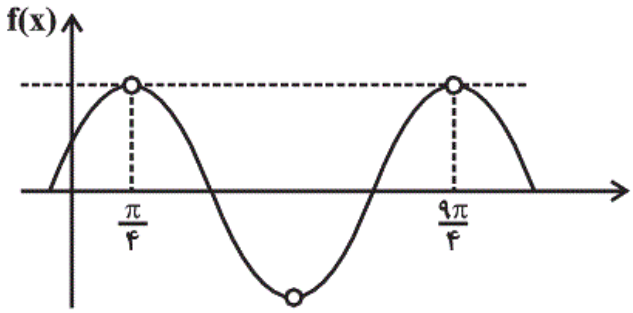
۱۰۴- (کاظم اجلالی)

$$f(x)=\frac{\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}{-\sin x+\cos x}=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}$$

$$=\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

$$f(x)=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})\ ,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و دوره تناوب آن ۲π است.



(ریاضی ۲ - مثلثات، صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۵- (فریدون ساعتی)

$$A=(\sin\frac{\pi}{۶}\cos x-\cos\frac{\pi}{۶}\sin x)^{۲}+$$

$$(\sin\frac{\pi}{۶}\cos x+\cos\frac{\pi}{۶}\sin x)^{۲}+\frac{۱}{۲}(۲\cos^{۲}x-۱)$$

$$=\frac{۱}{۴}\cos^{۲}x+\frac{۳}{۴}\sin^{۲}x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x\cos x$$

$$+\frac{۱}{۴}\cos^{۲}x+\frac{۳}{۴}\sin^{۲}x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x\cos x$$

$$+\cos^{۲}x-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\cos^{۲}x+\frac{۳}{۲}\sin^{۲}x-\frac{۱}{۲}$$

$$=\frac{۳}{۲}(\underbrace{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}_{۱})-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}=۱$$

(حسابان - مثلثات، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۰۶- (کاظم اجلالی)

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2(\frac{1}{3})^2 = \frac{7}{9}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(\frac{7}{9})^2 - 1 = \frac{17}{81}$$

(حسابان - مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۷- (امید کشاورز)

$$\frac{2\beta}{3} = (2\alpha + \frac{\beta}{3}) - (2\alpha - \frac{\beta}{3})$$

$$\tan\frac{2\beta}{3} = \frac{\tan(2\alpha + \frac{\beta}{3}) - \tan(2\alpha - \frac{\beta}{3})}{1 + \tan(2\alpha + \frac{\beta}{3})\tan(2\alpha - \frac{\beta}{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{1+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2}{1+(3-1)} = \frac{2}{3}$$

(حسابان - مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$\begin{cases} ۱+\cos\alpha = ۲\cos^۲(\frac{\alpha}{۲}) \\ ۱-\cos\alpha = ۲\sin^۲(\frac{\alpha}{۲}) \end{cases}$$

عبارت مسأله را ساده می‌کنیم:

$$\sin\frac{\alpha}{۲} = ۱-\cos\alpha \Rightarrow \sin(\frac{\alpha}{۲}) = ۲\sin^۲(\frac{\alpha}{۲})$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲(\frac{\alpha}{۲}) - \sin(\frac{\alpha}{۲}) = ۰ \Rightarrow \sin(\frac{\alpha}{۲})(۲\sin(\frac{\alpha}{۲}) - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\frac{\alpha}{۲}) = ۰ \Rightarrow \frac{\alpha}{۲} = k\pi \xrightarrow{\times ۴} ۲\alpha = ۴k\pi \Rightarrow \tan ۲\alpha = ۰ \\ ۲\sin(\frac{\alpha}{۲}) - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin(\frac{\alpha}{۲}) = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \xrightarrow{\times ۴} ۲\alpha = ۸k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \tan ۲\alpha = -\sqrt{۳} \\ \frac{\alpha}{۲} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \xrightarrow{\times ۴} ۲\alpha = ۸k\pi + \frac{۱۰\pi}{۳} \Rightarrow \tan ۲\alpha = \sqrt{۳} \end{cases}$$

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۹-

$$\frac{۲\sin(x+y)-\sqrt{۳}}{\cos x.\cos y}=\frac{۲(\sin(x+y)-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{\cos x.\cos y}$$

$$=\frac{۲(\sin(x+y)-\sin\frac{\pi}{۳})}{\cos x.\cos y}$$

$$=\frac{۲(۲\sin(\frac{x+y-\frac{\pi}{۳}}{۲}).\cos(\frac{x+y+\frac{\pi}{۳}}{۲}))}{\cos x.\cos y}\xrightarrow{x-y=\frac{\pi}{۳}}$$

$$=\frac{۴\sin(\frac{x+y-x+y}{۲})\cos(\frac{x+y+x-y}{۲})}{\cos x.\cos y}$$

$$=\frac{۴\sin y.\cos x}{\cos x.\cos y}=\frac{۴\sin y}{\cos y}=۴\tan y$$

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۰- (سعید مدیرخراسانی)

راه حل اول:

$$\sqrt{۲}\cos ۵۵^\circ + \cos ۱۰^\circ - \sin ۱۰^\circ = \sqrt{۲}(\cos ۵۵^\circ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۱۰^\circ$$

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۱۰^\circ) = \sqrt{۲}(\cos ۵۵^\circ + \sin ۴۵^\circ \cos ۱۰^\circ - \cos ۴۵^\circ \sin ۱۰^\circ)$$

$$= \sqrt{۲}(\cos ۵۵^\circ + \sin(۴۵^\circ - ۱۰^\circ))$$

$$= \sqrt{۲}(\cos ۵۵^\circ + \sin ۳۵^\circ) = \sqrt{۲}(\cos ۵۵^\circ + \cos ۵۵^\circ)$$

$$= ۲\sqrt{۲}\cos ۵۵^\circ$$

راه حل دوم:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{۲}\cos(x + ۴۵^\circ)$$

$$= \sqrt{۲}\cos ۵۵^\circ + \sqrt{۲}\cos ۵۵^\circ = ۲\sqrt{۲}\cos ۵۵^\circ$$

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

ریاضي ، هندسه ۱ ، - ۱۳۹۶۰۸۱۹

۱۳۱- (رسول محسنی منش)

ضلع‌های دو مثلث متناسبند، پس دو مثلث متشابهند و زاویه‌های نظیر در آنها با هم برابر است. پس زاویهٔ روبه‌روی ضلع c در مثلث بزرگ با زاویهٔ روبه‌روی ضلع $۰/۵c$ در مثلث کوچک برابر است، پس: $\alpha = ۱۸۰^\circ - (۵۱^\circ + ۳۳^\circ) = ۹۶^\circ$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۲- (سروش موئینی)

در دو مثلث ABC و DEC، زاویه‌های D و A با هم برابر و زاویهٔ C مشترک است، پس:

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{CDE}$$

نسبت اضلاع متناظر: $\frac{BC}{CE} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD}$

$$\Rightarrow BC.CD = AC.CE$$

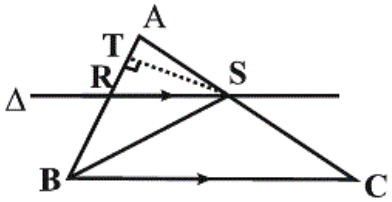
(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۳- (حسین حاجیلو)

مطابق شکل دو مثلث ARS و BRS، دارای ارتفاع مشترک ST هستند، پس نسبت مساحتهای آنها برابر با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع مشترک است، یعنی:

$$\frac{S(\overset{\triangle}{ARS})}{S(\overset{\triangle}{BRS})} = \frac{AR}{BR} \quad (*)$$



از طرفی طبق تعمیم قضیهٔ تالس، داریم:

$$\frac{AR}{AB} = \frac{RS}{BC} \Rightarrow \frac{AR}{AB - AR} = \frac{RS}{BC - RS} \Rightarrow \frac{AR}{BR} = \frac{RS}{BC - RS}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{S(\overset{\triangle}{ARS})}{S(\overset{\triangle}{BRS})} = \frac{RS}{BC - RS}$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

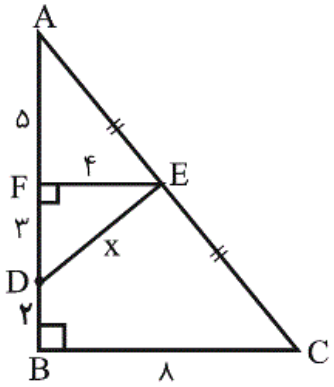
۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۴- *(رضا عباسی اصل)*

از E به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند، داریم:

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AF}{۱۰} = \frac{EF}{۸} \Rightarrow \begin{cases} AF = ۵ \Rightarrow FD = ۳ \\ EF = ۴ \end{cases}$$



$$\overset{\triangle}{DEF}: x^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow x = ۵$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۵- *(رسول محسنی منش)*

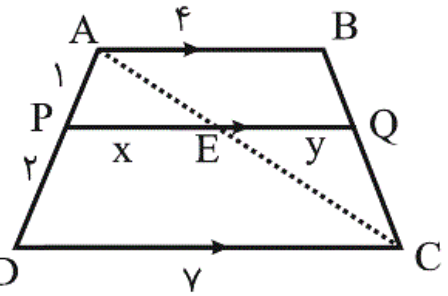
مطابق شکل، قطر AC را رسم می‌کنیم، داریم:

$$\overset{\triangle}{ACD} \xrightarrow[\text{تالس}]{PE \parallel DC} \frac{AP}{AD} = \frac{PE}{CD} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{۷} \Rightarrow x = \frac{۷}{۳}$$

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{۲}{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ABC} \xrightarrow[\text{تالس}]{EQ \parallel AB} \frac{EQ}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{y}{۴} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow y = \frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow PQ = x + y = \frac{۷}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$



(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۶- (سروش موئینی)

برای اینکه $a+b$ ماکسیمم شود، باید نسبت تشابه حداکثر باشد. پس ضلع بـه طـول ۴ از مثلث دوم را متناظر کوچکترین ضلع مثلث اول (یعنی ضلع با طول ۲) می‌گیریم و داریم:

$$k=\frac{۴}{۲}=۲$$

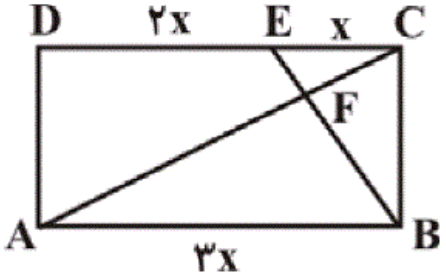
$$\Rightarrow \frac{a}{۴}=\frac{b}{۵}=\frac{۴}{۲}=k=۲\Rightarrow a+b=۸+۱۰=۱۸$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۷- (رضا عباسی‌اصل)

با فرض $EC=x$ داریم: $DE=۲x$



در نتیجه: $AB=DC=۳x$

مثلث‌های EFC و AFB به حالت تساوی زاویه‌های متناظرشان با هم متشابه‌اند. پس:

$$\frac{EF}{FB}=\frac{EC}{AB}\Rightarrow \frac{EF}{FB}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}}$$

$$\frac{EF+FB}{FB}=\frac{۱+۳}{۳}\Rightarrow \frac{EB}{FB}=\frac{۴}{۳}$$

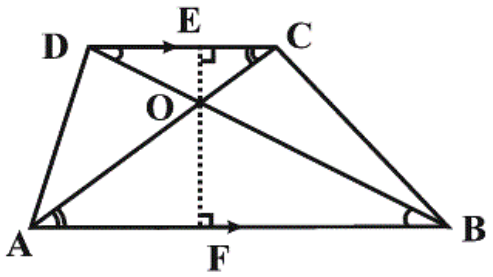
$$\xrightarrow{EB=۱۲}\frac{۱۲}{FB}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow FB=۹cm$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۸- (امیر زراندوز)

طبق فرض $CD=۱۲$، $AB=۱۶$ و $EF=۱۴$، لذا:



$$\overset{\triangle}{OCD} \sim \overset{\triangle}{OAB} \Rightarrow \frac{OE}{OF}=\frac{CD}{AB}=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{OE}{OE+OF}=\frac{۳}{۳+۴} \Rightarrow \frac{OE}{EF}=\frac{۳}{۷} \Rightarrow OE=۱۴\times\frac{۳}{۷}=۶$$

$$S(\overset{\triangle}{OCD})=\frac{OE\times CD}{۲}=\frac{۶\times۱۲}{۲}=۳۶$$

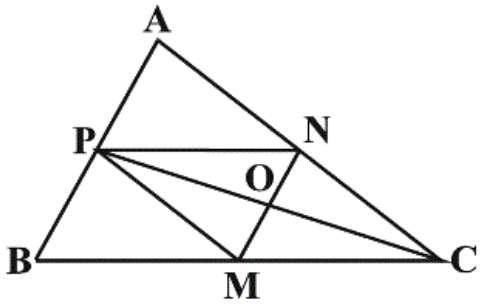
(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۳۹

طبق عکس قضیهٔ تالس داریم:

$$PN \parallel BC, PM \parallel AC$$



یعنی چهارضلعی $CMPN$ متوازی‌الاضلاع است. از طرفی می‌دانیم که با رسم قطرهای یک متوازی‌الاضلاع، چهار مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود، که $\overset{\Delta}{OMC}$ یکی از این مثلث‌ها و $\overset{\Delta}{MNP}$ متشکل از دوتا از این چهار مثلث است، پس:

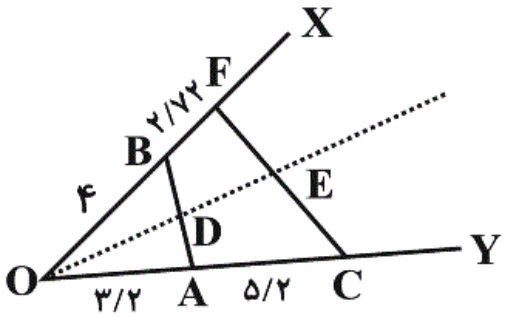
$$\frac{S(\overset{\Delta}{OMC})}{S(\overset{\Delta}{MNP})} = \frac{۱}{۲}$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۴۰ (حسین حاجیلو)

دو مثلث OAB و OCF در زاویهٔ O مشترکند، همچنین $\frac{۴}{۳/۲+۵/۲}=\frac{۳/۲}{۴+۲/۷۲}$، پس $\frac{OB}{OC}=\frac{OA}{OF}$. بنابراین دو مثلث OAB و OFC بنا به حالت تساوی یک زاویه و تناسب ضلع‌های آن زاویه با هم متشابهند. از آنجا که OD و OE نیمسازهای متناظر در این دو مثلث هستند، نسبت آنها برابر با نسبت تشابه است:



$$\frac{OD}{OE}=\frac{OB}{OC}\Rightarrow\frac{OD}{OE}=\frac{۴}{۸/۴}\Rightarrow\frac{OD}{OE-OD}=\frac{۴}{۸/۴-۴}$$

$$\Rightarrow\frac{OD}{DE}=\frac{۴}{۴/۴}\Rightarrow\frac{DE}{OD}=\frac{۴/۴}{۴}=۱/۱$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

ریاضي ، ديفرانسيل و انتگرال - گواه ، - ۱۳۹۶۰۸۱۹

-۹۱ (کتاب آبی - سوال ۱۰۱۶)

$$b=\frac{a(1-\sqrt{3})}{-2}+\frac{3(2-\sqrt{3})}{4-3}\Rightarrow b=\frac{(\sqrt{3}-1)a}{2}+3(2-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b=\left(\frac{a}{2}-3\right)\sqrt{3}+6-\frac{a}{2}$$

برای آنکه b گویا باشد، باید ضریب $\sqrt{3}$ صفر باشد، بنابراین:

$$\frac{a}{2}-3=0\Rightarrow a=6\Rightarrow b=0+6-3=3$$

$$\Rightarrow a-2b=0$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ تا ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۹۲ (کتاب آبی - سؤال ۱۲۷)

با فرض $a=c=1$ و $d=2$ و $b=5$، ملاحظه می‌شود که گزینهٔ ۳ نادرست خواهد بود.

گزینهٔ «۱»: $\begin{cases}0<a<b\\0<c<d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<b\\-d<-c\end{cases}\Rightarrow a-d<b-c$

گزینهٔ «۲»: $\begin{cases}0<a<b\\0<c<d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<a<b\\0<\frac{1}{d}<\frac{1}{c}\end{cases}\xrightarrow{\text{ضرب}}0<\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$

گزینهٔ «۴»: $\begin{cases}a-d<b-c & \text{طبق گزینهٔ (۱)}\\0<b & \text{طبق فرض}\end{cases}$

$$\Rightarrow a-d<2b-c\Rightarrow c-2b<d-a$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحهٔ ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۳

اگر $a^{۳}$ گویا و $b^{۵}$ گنگ باشد، $a^{۲}+b^{۱۰}$ لزوماً گویا نیست، چون $b^{۱۰}$ ممکن است گویا یا گنگ باشد. (در نظر بگیرید $b^{۵}=\sqrt[۵]{۲}$ و $b^{۵}=\sqrt{۲}$) در گزینه‌های «۲» و «۳» چون ممکن است $a^{۳}=۰$ (گویا) باشد آنگاه $a^{۳}b^{۵}$ گویا و $a^{۳}+b^{۵}$ گنگ می‌شود، اما اگر $b^{۵}$ گنگ باشد b نیز گنگ است و اگر $a^{۳}$ گویا باشد $a^{۶}$ نیز گویا است. پس $a^{۶}+۱$ عددی گویا و غیرصفرخواهد بود، لذا $\frac{a^{۶}+۱}{b}$ گنگ خواهد بود.

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه؛ صفحه‌های ۷ تا ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۹۴ (سراسری خارج کشور - ۸۴)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲n-۱}{۳n+۲} = \frac{۲}{۳}$$

دنبالهٔ فوق صعودی است، پس جمله‌ای از دنباله نیست که بزرگتر از $\frac{۲}{۳}$ باشد، بنـابراین،

شعاع همگرایی برابر است با:

$$\varepsilon = \frac{۲}{۳} - ۰/۶۶ = \frac{۲}{۳} - \frac{۶۶}{۱۰۰} = \frac{۲}{۳۰۰}$$

بنابراین طبق تعریف ریاضی، باید فاصلهٔ جملات دنباله از مقـدار حـد آن را کـوچکتر از

شعاع همگرایی قرار دهیم:

$$\left|\frac{۲n-۱}{۳n+۲} - \frac{۲}{۳}\right| < \frac{۲}{۳۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۳(۳n+۲)} < \frac{۲}{۳۰۰} \Rightarrow \frac{۳n+۲}{۷} > ۵۰$$

$$\Rightarrow ۳n+۲ > ۳۵۰ \Rightarrow ۳n > ۳۴۸ \Rightarrow n > ۱۱۶ \Rightarrow n \geq ۱۱۷$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۵ (سراسری ریاضی - ۸۷)

با توجه به این که $۲n-۱$ یک عدد فرد است، بنابراین $(-۱)^{۲n-۱}=-۱$ است،

پس می‌توان نوشت: $$\left\{n^{(-۱)^{۲n-۱}}\right\}=\left\{n^{(-۱)}\right\}=\left\{\frac{۱}{n}\right\}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}=۰$ بنابراین، این دنباله همگراست.

بررسی گزینه‌های دیگر:

گزینه‌ی (۲): $$a_n=\cos\frac{n\pi}{۲}$$

اگر جملات این دنباله را بنویسیم، داریم:

$$a_۱=۰\,,\ a_۲=-۱\,,\ a_۳=۰\,,\ a_۴=۱,\ a_۵=۰,\ a_۶=-۱,\ldots$$

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۹۶ (کتاب آبی - سؤال ۱۱۰۲)

اگر n زوج باشد، آنگاه $a_{n+۳}$ و $a_{n+۱}$ متعلق به جملات با شمارهٔ فرد خواهند بود،

لذا: $$\lim_{n\to\infty}(a_{n+۱}-a_{n+۳})=۱-۱=۰$$

اگر n فرد باشد، آنگاه $a_{n+۱}$ و $a_{n+۳}$ متعلق به جملات با شماره‌ی زوج هستند،

پس: $$\lim_{n\to\infty}(a_{n+۱}-a_{n+۳})=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۹۷ (کتاب آبی - سؤال ۱۱۰۲)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+\sqrt{n}+1)^2-(n+2\sqrt{n}+1)^2}{(2\sqrt{n}+1)^2(\sqrt{n}+3)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+\sqrt{n}+1-n-2\sqrt{n}-1)(n+\sqrt{n}+1+n+2\sqrt{n}+1)}{(4n+4\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\sqrt{n}(2n+3\sqrt{n}+2)}{(4n+4\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n\sqrt{n}}{4n\sqrt{n}}=\frac{-1}{2}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم که اگر $a > ۱$ باشد، آنگاه $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ ، پس در گزینهٔ «۱»، دنبالهٔ $\{(\frac{۳}{۲})^n\}$ همگرا نیست و این گزینه حذف می‌شود.

در گزینهٔ«۳» سه جملهٔ ابتدایی دنباله را می‌نویسیم:

$$U_n = \left[\frac{(-۱)^n}{n}\right]$$

$$\Rightarrow U_۱ = \left[\frac{-۱}{۱}\right] = -۱ \, , \, U_۲ = \left[\frac{۱}{۲}\right] = ۰ \, , \, U_۳ = \left[\frac{-۱}{۳}\right] = -۱$$

بنابراین دنبالهٔ $\left\{\left[\frac{(-۱)^n}{n}\right]\right\}$ نه صعودی و نه نزولی است و گزینهٔ «۳» نیز حذف می‌شود.

در گزینهٔ «۴» داریم: $U_n = \frac{۲n+۱}{n} = \frac{۲n}{n} + \frac{۱}{n} \Rightarrow U_n = ۲ + \frac{۱}{n}$

با افزایش n، مقدار $\frac{۱}{n}$ و در نتیجه $(۲ + \frac{۱}{n})$ کاهش می‌یابد، پس دنباله‌ی $\{\frac{۲n+۱}{n}\}$ نزولی است و گزینه‌ی «۴» نیز حذف می‌شود.

پس گزینهٔ «۲» پاسخ صحیح است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

با نوشتن چند جملهٔ دنباله، خواهیم داشت:

$$\underbrace{۳, \frac{۹}{۸}, ۱}_{\text{نزولی}}, \underbrace{\frac{۸۱}{۶۴}, \frac{۲۴۳}{۱۲۵}}_{\text{صعودی}}, \dots$$

با توجه به مقادیر، دیده می‌شود که در این دنباله، از جملهٔ سوم به بعد دنباله صعودی خواهد بود، پس بزرگترین کران پایین آن، جملهٔ سوم یعنی $U_۳ = ۱$ خواهد بود.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{۷+۴^{n-۱}}{۲+۴^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۴^{n-۱}}{۴^n} = \frac{۱}{۴}$$

دنباله همگراست، پس کراندار است. بنابراین یکی از گزینه‌های ۳ یا ۴ می‌تواند درست باشد. برای تعیین صعودی یا نزولی بودن کافی است جملهٔ اول را با عدد همگرایی مقایسه کنیم:

$$a_۱ = \frac{۷+۴^۰}{۲+۴} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳} \quad ,\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{۱}{۴}$$

از آنجایی که $a_۱ > \lim_{n\to+\infty} a_n$، با توجه به شکل فرضی زیر، دنباله نزولی است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir